**¿Por qué el área bajo una hipérbola es un logaritmo?**

Grafiquemos la función y = 1/x, que representa una hipérbola. ¿Cómo calculamos el área bajo esta hipérbola, entre dos puntos a y b? Resulta que el área se puede expresar mediante un logaritmo, y en este caso el área es “logaritmo natural de b/a”. Se le llama “natural” por estar en una base específica: el número e, que es aproximadamente 2,71828.

Pero, ¿por qué el área bajo esta hipérbola es un logaritmo? ¿Por qué tiene una base tan extraña? ¿Y por qué esta base hace que el logaritmo sea “natural”? En este video vamos a darles respuesta a esas preguntas.

-

La función y = 1/x se puede reescribir como xy = 1. ¿Qué significa esta ecuación? Si tomas un punto P cualquiera, donde su componente horizontal es x y su componente vertical es y, entonces xy es el producto de ambas componentes, que se puede interpretar como el área de este rectángulo. Lo que nos dice la fórmula xy = 1 es que debemos tomar todos los puntos tales que esta área sea igual a 1. Entonces, si tenemos un punto P cuya componente horizontal es x, para que el área sea igual a 1, su componente horizontal debe ser 1/x.

Ahora, si a este punto P, le multiplicas la coordenada x por 2, entonces el área de este rectángulo se duplica. Para contrarrestar esto, la coordenada y debe dividirse por 2. Así, el área vuelve a ser 1.

Si por otra parte, divides la coordenada x por 3, el área se divide por 3. Para arreglarlo, debemos multiplicar la coordenada y por 3.

En general, si multiplico x por una constante positiva lambda, entonces y debe responder dividiéndose por lambda, o multiplicándose por 1/lambda. Así, el punto P = (x, y) se transforma en el punto (lambda\*x, y/lambda).

Si voy poniéndole diferentes valores a lambda, el resultado se mueve recorriendo esta curva.

Este es el gráfico de la ecuación xy = 1, o y = 1/x, y es una hipérbola. Esta curva se compone de todos los puntos de la forma (x, 1/x). Es decir, forman parte del gráfico los puntos (1, 1), (2, ½), (3, 1/3), etc. Todos ellos forman rectángulos de área 1.

---

El proceso que mencioné antes, donde escalo la componente x por lambda y la componente y por 1/lambda, es una transformación bien interesante que llamamos “rotación hiperbólica”. Los detalles los dejo para el próximo video, pero tiene dos propiedades de las que tenemos que hablar ahora.

Primero, si tomo un punto P de esta curva, escalo su componente x en lambda, y su componente y en 1/lambda, el resultado sigue estando en la curva. En general, si agarro un trozo de la hipérbola, y le aplico la misma transformación a todos sus puntos, como todos ellos van a terminar en la curva, el trozo original se mapea a otro trozo de la misma hipérbola. Incluso, puedo tomar la curva completa, y se va a transformar en la misma curva. Así que la primera propiedad importante, es que la hipérbola se preserva. Todo punto en la hipérbola se queda en la hipérbola. Todo arco de hipérbola se mapea a otro arco en la misma curva.

La segunda propiedad tiene que ver con las áreas. Si escalo el ancho de un rectángulo en lambda, y escalo su altura en 1/lambda, su área final va a ser la misma. Pero eso vale no solo para rectángulos, sino para cualquier figura compleja. Para ver por qué, puedes imaginar que se divide en varios rectángulos pequeños. En cada uno de ellos, su ancho se escala por lambda, y luego su altura se escala en 1/lambda. El área de cada uno de esos pequeños rectángulos sigue siendo la misma que tenía al principio. Así que, tanto al principio como al final, la suma de las áreas de todos los rectángulos, que da el área de toda la figura compleja, se mantiene igual.

Entonces, cuando haces una rotación hiperbólica, todas las áreas, de cualquier figura posible, se conservan.

Y son precisamente las áreas el tema que nos convoca: ¿cuál es el área bajo la hipérbola y = 1/x, entre los puntos x = a y x = b, ambos positivos?

---

Antes de calcularla a la fuerza, notemos que tiene algunas propiedades importantes.

Tomemos el área entre a y b, y denotémosla de esta manera: A mayúscula de a coma b. A esta área le puedes aplicar una rotación hiperbólica. Es decir, escalar su ancho por lambda, y su altura por 1/lambda. El punto a se mueve a lambda\*a, y el punto b se mueve a lambda\*b.

Recuerda que el arco de hipérbola que limita esta región por arriba, cuando le apliques la transformación, se va a mapear a otro arco en la misma hipérbola. Así, esta nueva región también va a ser un área bajo la curva, esta vez entre los puntos lambda\*a y lambda\*b.

Además, la rotación hiperbólica conserva las áreas, así que esta área entre lambda\*a y lambda\*b, es exactamente igual al área entre a y b.

Esta es la propiedad esencial que cumple el área bajo la hipérbola y = 1/x, y podemos ir jugando con esta idea.

Por ejemplo, puedo tomar una copia de esta área entre a y b, y rotarla con un lambda conveniente, tal que esta copia transformada comience justo donde termina la original. Así, estas dos áreas se pueden unir en una sola. Para lograr esto, se debe cumplir que lambda\*a = b, por lo que debo elegir lambda = b/a. Al usar este lambda, el punto a se mueve al punto b, y el punto b se mueve al punto (b^2)/a. Entonces, el área entre a y b, más el área entre b y b^2/a, nos da el área entre a y (b^2)/a. Pero como la segunda área es una copia transformada de la primera, ambas son iguales. Así, el área entre a y (b^2)/a es dos veces el área entre a y b.

Esto es solo un ejemplo de lo que se puede hacer, gracias a la propiedad de que el área entre lambda\*a y lambda\*b es igual al área entre a y b. Ahora, analizar el área entre \*cualquier\* par de puntos a y b se pone un poco complicado, porque podemos mover los dos puntos a cualquier lado, teniendo dos grados de libertad. Sería ideal poder fijar uno de los puntos y solo mover el otro, y así analizar solo las áreas que parten en un mismo punto.

Por suerte, esta propiedad nos permite hacer justamente eso. Si tenemos un área entre cualquier par de puntos a y b, pero queremos analizar solo las que comienzan en cierto punto, digamos x = 1, solo basta con transformarla con un lambda conveniente, en este caso 1/a, para que el punto a aterrice en el punto 1 donde queremos que partan todas las áreas. Así, en vez de analizar el área entre a y b, analizamos el área entre 1 y b/a.

De ahora en adelante, vamos a considerar como “áreas normalizadas” aquellas que partan en 1. Esto, porque nuestra propiedad esencial juega con la idea de la multiplicación, y el 1 es el neutro multiplicativo. Así, si tenemos un área entre 1 y x, en vez de denotarla A(1, x), también podemos denotarla A\_1(x).

Entonces, repitamos la misma idea de antes. Si tengo un área entre 1 y x, y la transformo con un lambda = x, se transforma en el área entre x y x^2. Entonces, el área entre 1 y x, más el área entre x y x^2, da el área entre 1 y x^2. Pero el segundo término es igual al primero. Eso nos lleva a que el área entre 1 y x^2, es 2 veces el área entre 1 y x, un resultado interesante.

Más en general, si tengo el área entre 1 y x, y el área entre 1 e y, donde x e y son constantes mayores que 1, el área entre 1 e y la puedo transformar con un lambda = x, para convertirla en el área entre x y xy. Luego, ambas áreas se unen para formar el sector entre 1 y xy. El área de este sector sería igual a la suma de los primeros dos términos. Pero el segundo es igual al área entre 1 y y, dejándonos esta expresión. Ahora, si en vez de escribir A(1, x) escribimos A\_1(x), entonces el área tiene la siguiente propiedad: A\_1(xy) = A\_1(x) + A\_1(y).

Básicamente, esta función convierte un producto en una suma. ¿Te suena familiar esta propiedad? Pues es exactamente lo mismo que hacen los logaritmos. Un logaritmo tiene como propiedad que log(xy) = log(x) + log(y). También tiene como propiedad que log(1) = 0. Si te preguntas cuál es el valor de A\_1(1), es lo mismo que preguntarte cuál es el área entre 1 y 1. Pero como son el mismo punto, no abarcan ningún área, entonces A\_1(1) también vale 0. Todo esto nos dice que el área bajo la hipérbola entre los puntos 1 y x, es un logaritmo. \*\*\*A este en particular le llamamos “logaritmo hiperbólico”.\*\*\*

-

Esta área cumple otras propiedades que también son del logaritmo.

Por ejemplo, si ahora tenemos el área entre 1 y x/y, podemos rotarla por un factor de y, transformándola en el área entre y y x. Esta área se puede expresar como el área entre 1 y x, menos el área entre 1 y y. Esto quiere decir que A\_1(x/y) = A\_1(x) – A\_1(y). Esto también es otra propiedad de los logaritmos: log(x/y) = log(x) – log(y). En este caso particular, si x = 1, esto nos deja que el área hasta 1/y es igual al área hasta 1, menos el área hasta y. Pero el área hasta 1 es 0, así que nos queda que el área hasta 1/y es igual a menos el área hasta y. Pero un momento, ¿estamos hablando de áreas negativas?

Lo que pasa, es que no hemos hablado todavía de qué pasa cuando tomamos valores menores que 1. Resulta que el logaritmo de un número menor que 1, da un valor negativo. Podemos replicar la misma idea para nuestra función de área, diciendo que si tomamos el área entre 1 y x, pero x es menor que 1, esta área es negativa.

En general, si tienes el área entre a y b, pero b es menor que a, decimos que esta área es negativa. Pero si cambias el orden de los puntos, es decir, si consideramos el área entre b y a, el área sería positiva. En general, el área entre b y a, es opuesta al área entre a y b.

Así, si volvemos al área entre 1 y x, donde x es menor que 1, entonces es negativa. Si invertimos el orden de los puntos, invertimos el signo del área. Pero esta área ya no está normalizada, porque ya no comienza en 1. Para arreglarlo, debemos rotarla usando un factor lambda = 1/x. Al hacer esto, nos queda el área entre 1 y 1/x. Por ende, esta área es igual al opuesto del área entre 1 y x.

Ahora veamos una última propiedad: si tengo el área entre 1 y x, tomo una copia y la roto por un factor de x, nos da en total el área hasta x^2, que es igual a 2 veces el área hasta x. Si el último sector lo copio y lo vuelvo a rotar por x, me queda el área hasta x^3, que es 3 veces el área hasta x. En general, el área hasta x^n es igual a n veces el área hasta x. Otra propiedad de los logaritmos: log(x^n) = nlog(x).

---

Entonces, ahora que sabemos que el área bajo la hipérbola es un logaritmo, ¿podemos calcular cuánto mide el área entre 1 y x, o más generalmente entre a y b?

Pues todavía no, porque nos falta una información importante: ¿cuál es la base de este logaritmo?

Si la base es un número B, sabemos que el logaritmo en base B de B es exactamente 1. Si el área es ese logaritmo en base B, entonces debe cumplirse que el área entre 1 y B sea 1. O sea, estamos buscando el punto tal que el área bajo la curva hasta ese punto sea exactamente 1. ¿Cómo lo encontramos?

---

Podemos intentar explotar la propiedad esencial del área bajo la hipérbola, así: dado un sector pequeño entre 1 y x, generamos varias copias de este y las vamos rotando, hasta generar sectores entre x y x^2, entre x^2 y x^3, y así. La idea es que con estas copias tratemos de cubrir un área total de 1. Entonces, si creamos n copias, que cubren el área hasta x^n, y toda esta área es igual a 1, entonces x^n es la base B del logaritmo. Además, como son n sectores de igual área, cada una de sus áreas debe ser igual a 1/n.

Ahora, a medida que aumentamos el valor de n, aumenta la cantidad de sectores, y a la vez cada sector se hace más pequeño. En el límite, cuando n tiende a infinito, cada sector se puede aproximar como un rectángulo. El primero de todos los rectángulos tiene una altura de 1, por lo que para que tenga un área de 1/n, su ancho debe ser también 1/n.

Si antes dijimos que este primer sector va desde 1 hasta x, entonces x debe ser 1 más el ancho, o sea 1 + 1/n. Así, el primer sector va desde 1 hasta 1 + 1/n. El segundo va desde este número hasta el número al cuadrado. El tercero va desde el número al cuadrado hasta el número al cubo, y así. Al final, el área entre 1 y (1 + 1/n)^n, cuando n tiende a infinito, es igual a 1. Entonces, este número, (1 + 1/n)^n cuando n tiende a infinito, es la base que estamos buscando. ¿Cuál es su valor?

Para poder calcular cuánto vale este número, notemos que es un binomio elevado a un entero n, o sea una potencia de binomio. Esto quiere decir que podemos usar el teorema del binomio de Newton, que nos dice que una potencia de binomio (a + b)^n se puede expresar como la sumatoria, donde k va desde 0 hasta n, del número combinatorio n sobre k, por a^(n-k), por b^k. Ya hice un video antes donde explicaba este teorema, así que te recomiendo verlo si no lo entiendes al 100%.

Entonces, nuestra potencia de binomio (1 + 1/n)^n se puede expresar como el límite, cuando n tiende a infinito, de la sumatoria, donde k va desde 0 hasta n, del número combinatorio n sobre k, por 1^(n-k), por (1/n)^k. n sobre k es igual a n! / [(n-k)!\*k!], y 1^(n-k) sigue siendo 1. Así, cada término queda de la forma n! / [(n-k)!\*k!\*n^k].

El primer término, cuando k = 0, es simplemente 1, o 1/0!.

El segundo, cuando k = 1, es n / (1! \* n), que se reduce a 1, o 1/1!.

El tercero, cuando k = 2, es n(n-1) / (2! \* n^2). Esto, en el límite cuando n tiende a infinito, tiende a 1/2!.

El cuarto término, cuando k = 3, es n(n-1)(n-2) / (3! \* n^3). Esto en el límite tiende a 1/3!.

Y ya entiendes la idea. El k-ésimo término va a tender a 1/k!, así que la sumatoria queda como 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3!, y así hasta el infinito.

Al ir realizando esta suma, término por término, el resultado se va acercando al siguiente número: 2,71828, etc.

Esta es la base que estábamos buscando para nuestro logaritmo. Esto quiere decir, que el área bajo esta hipérbola y = 1/x es igual a 1, cuando comienza en 1 y termina en 2,71828, etc.

Este número se conoce como el número de Euler, y se representa con una letra e. Esto en honor al matemático Leonhard Euler, quien precisamente resolvió este mismo problema de encontrar el número x que hiciera que esta área entre 1 y x fuera 1.

Así, el área entre 1 y x se expresa como el logaritmo en base e de x. Y el área entre dos puntos a y b cualquiera es log(b) – log(a), que se puede reducir a logaritmo en base e de (b/a).

---

Bien, hasta ahora ya hemos respondido dos de tres preguntas importantes: por qué el área bajo esta curva es un logaritmo, y cuál es la base de este logaritmo. Pero todavía nos falta una cosa: a este logaritmo en base e, le llamamos “logaritmo natural” y lo denotamos como “ln”. ¿Por qué lo llamamos “natural”? ¿Qué es lo que lo hace tan especial a diferencia de otros?

Lo que lo hace “natural”, es el hecho de ser la integral de una expresión tan sencilla como y = 1/x.

\*seguir elaborando en este punto\*